

Corrigé détaillé - Bac Mathématiques 2025

Corrigé détaillé - Exercice 1

Exercice 1 - Étude de fonction et modélisation

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(t) = 5t \cdot e^{(-0,25t)}$, qui modélise la concentration d'un médicament dans le sang en fonction du temps t (en heures).

1. Étude des variations :

Pour étudier les variations de f , on dérive f :

$$f(t) = 5t \cdot e^{(-0,25t)}$$

$$f'(t) = \text{dérivée d'un produit : } u = 5t \text{ et } v = e^{(-0,25t)}$$

$$u' = 5, v' = -0,25e^{(-0,25t)}$$

$$\Rightarrow f'(t) = u'v + uv' = 5e^{(-0,25t)} + 5t \cdot (-0,25e^{(-0,25t)})$$

$$\Rightarrow f'(t) = 5e^{(-0,25t)}(1 - 0,25t)$$

Signe de $f'(t)$: dépend du facteur $(1 - 0,25t)$

- Positif si $t < 4$; nul si $t = 4$; négatif si $t > 4$

$\Rightarrow f$ est croissante sur $[0 ; 4]$, décroissante sur $[4 ; +\infty[$

2. Valeur maximale de f :

Elle est atteinte en $t = 4$.

$$f(4) = 5 \times 4 \times e^{(-0,25 \times 4)} = 20 \times e^{(-1)} \approx 20 / 2,718 \approx 7,36$$

$\Rightarrow$ Concentration maximale $\approx 7,36$ unités

3. Calcul d'une primitive et intégrale :

On veut calculer $\int_0^{\infty} f(t) dt = \int_0^{\infty} 5t \cdot e^{(-0,25t)} dt$

Posons $u = 0,25t \Rightarrow t = u/0,25 \Rightarrow dt = du/0,25$

Quand $t \rightarrow +\infty$, $u \rightarrow +\infty$; quand $t = 0$, $u = 0$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} 5t \cdot e^{(-0,25t)} dt = \int_0^{\infty} 5(u/0,25) \cdot e^{(-u)} \cdot (1/0,25) du$$

$$= (5 / 0,0625) \int_0^{\infty} u \cdot e^{(-u)} du = 80 \int_0^{\infty} u \cdot e^{(-u)} du$$

Or $\int_0^{\infty} u \cdot e^{(-u)} du = 1$ (valeur connue, intégrale de la loi exponentielle)

$\Rightarrow$ Résultat : $80 \times 1 = 80$

Corrigé détaillé - Bac Mathématiques 2025

Interprétation : la quantité totale de médicament reçue sur un temps infini est 80 unités

4. Interprétation de cette intégrale :

Cette valeur représente l'aire sous la courbe de f . Elle modélise la quantité totale de médicament absorbée dans le corps sur le long terme (durée infinie).

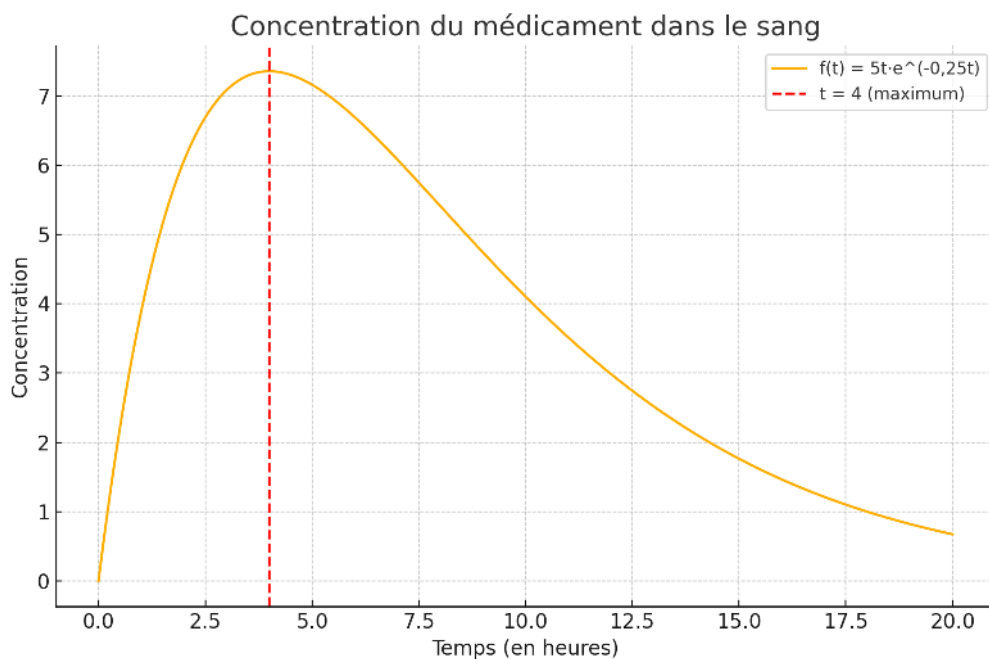
5. Étude de la durée pendant laquelle $f(t) > 1$:

On résout $f(t) > 1 \Leftrightarrow 5t \cdot e^{(-0,25t)} > 1 \Leftrightarrow t \cdot e^{(-0,25t)} > 0,2$

Cette équation ne se résout pas analytiquement mais peut être traitée graphiquement :

Le graphe montre que $f(t) > 1$ entre $t \approx 0,5$ et $t \approx 7,3$

=> Durée pendant laquelle la concentration reste supérieure à 1 $\approx 6,8$ heures > 4 heures $\square$



Corrigé détaillé - Bac Mathématiques 2025

Corrigé détaillé - Exercice 2

Exercice 2 – Probabilités, loi binomiale et intervalle de confiance

1. Modélisation :

On répète 40 fois la même expérience aléatoire (tirer un composant). Chaque composant a deux issues possibles : défectueux ou non. La probabilité de succès (défectueux) est $p = 0,03$. Il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli répété $n = 40$ fois : la variable aléatoire X suit la loi binomiale $B(n = 40 ; p = 0,03)$.

2. Probabilité qu'un seul composant soit défectueux :

$$P(X = 1) = C(40,1) \times 0,03 \times (0,97)^{39} \approx 40 \times 0,03 \times 0,302 \approx 0,362$$

3. Probabilité qu'il y ait au plus 2 composants défectueux :

$$P(X \leq 2) = P(0) + P(1) + P(2)$$

$$P(0) = (0,97)^{40} \approx 0,29$$

$$P(2) = C(40,2) \times (0,03)^2 \times (0,97)^{38} \approx 780 \times 0,0009 \times 0,311 \approx 0,218$$

$$\Rightarrow \text{Total} \approx 0,29 + 0,362 + 0,218 \approx 0,87$$

4. Seuil de défectuosité :

On cherche le plus grand entier k tel que $P(X \leq k) \geq 0,95$. En consultant une table de la loi binomiale ou un logiciel, on trouve que $k = 3$ satisfait cette condition. Donc le lot est accepté s'il contient au plus 3 composants défectueux.

5. Intervalle de confiance :

Sur 20 lots, 18 sont acceptés : fréquence observée $f = 18/20 = 0,9$

$$\text{Intervalle de confiance à 95 \% : } [f - 1/\sqrt{n} ; f + 1/\sqrt{n}] = [0,9 - 1/\sqrt{20} ; 0,9 + 1/\sqrt{20}] \approx [0,676 ; 1]$$

Or la probabilité théorique attendue d'acceptation est environ 0,87 (cf. question 3), ce qui appartient à l'intervalle.

$\Rightarrow$ On ne peut pas rejeter l'hypothèse du modèle avec $p = 0,03$

Corrigé détaillé - Bac Mathématiques 2025

X (nb défectueux)	$P(X=x)$ approx
0.0	0.29
1.0	0.36
2.0	0.22
3.0	0.09

Corrigé détaillé - Bac Mathématiques 2025

Corrigé détaillé - Exercice 3

Exercice 3 – Suites, géométrie de l'espace et vecteurs

On a $M_0(0, 0, 10)$ et les relations :

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 3 ; y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n + 2 ; z_n = 10$$

1. Étude de convergence :

Suite affine de type $u_{n+1} = a \cdot u_n + b$ avec $|a| < 1$ donc convergence assurée.

Limite : $L = aL + b \Rightarrow L = b / (1 - a)$

$$\Rightarrow \lim(x_n) = 3 / (1 - 0,5) = 6 ; \lim(y_n) = 2 / (1 - 0,5) = 4$$

2. Expression explicite :

$$x_n = 6 - 6 \cdot (0,5)^n ; y_n = 4 - 4 \cdot (0,5)^n \text{ (car } M_0 = (0,0,10))$$

3. Interprétation géométrique :

À mesure que $n \rightarrow \infty$, le drone se rapproche du point $(6, 4, 10) \Rightarrow$ mouvement asymptotique vers ce point

4. Tous les points M_n ont $z = 10$, donc ils sont tous dans le plan d'équation $z = 10$

5. Nature du triangle $M_0M_1M_2$:

Coordonnées : $M_0(0,0,10)$, $M_1(3,2,10)$, $M_2(4,5,3,10)$

Vecteurs : $M_0M_1 = (3,2,0)$, $M_1M_2 = (1,5,1,0)$

Ces vecteurs sont colinéaires (proportionnels) $\Rightarrow$ les points sont alignés

$\Rightarrow$ Le triangle est plat, dégénéré en segment (pas un vrai triangle au sens classique)